# Examen final

**Durée : 3h.**

*Tout document interdit, tout appareil électronique interdit.*

L'énoncé comporte trois pages et cinq exercices indépendants. **On demande de traiter l'exercice 5 *en dernier*.**

**Exercice 1**

1. Établir que pour tout $s \in \mathbb{C}$ tel que $0 < \operatorname{Re} s < 1$, on a
$$\int_0^\infty t^{s-1} \sin t \, \mathrm{d}t = \sin(\pi s/2)\Gamma(s)\,,$$
où $\Gamma$ désigne la fonction *Gamma* d'Euler.
[On pourra commencer par fixer $0 < \varepsilon < T$ et intégrer $f(z) = \exp(-z)z^{s-1}$ le long d'une courbe dont le support est la réunion des segments $[\varepsilon, T]$, $[T, T+iT]$, $[iT, T+iT]$, $[i\varepsilon, iT]$, et du quart de cercle centré en l'origine joignant $\varepsilon$ et $i\varepsilon$.]
2. L'égalité de la question 1 reste-t-elle vérifiée plus généralement si $-1 < \operatorname{Re} s < 1$ ?

**Exercice 2**

1. Donner un contre-exemple au principe du maximum sur un ouvert non borné de $\mathbb{C}$.
2. On note $V = \{z \in \mathbb{C}\colon \operatorname{Re}(z) \geqslant 0\}$. Soit $f$ une fonction holomorphe sur un ouvert contenant $V$, telle que $|f(z)| \leqslant 1$ si $z$ est sur l'axe imaginaire et telle qu'il existe $0 < \delta < 1$ et des constantes $A, B$ tels que
$$|f(z)| \leqslant A \exp(B|z|^{1-\delta})$$
pour tout $z \in V$.
   (a) On note $g(z) = \exp(z^{1-\delta/2})$ (où $z^{1-\delta/2}$ est la détermination définie sur $\mathbb{C}\backslash\mathbb{R}_-$, positive sur l'axe réel positif, prolongée par 0 en 0). Montrer que $|g|$ est minorée par 1 sur l'axe imaginaire et que $|g(z)| \geqslant \exp(R^{1-\delta/2}m)$ si $z \in V$ vérifie $|z| = R$, pour une certaine constante $m > 0$ ne dépendant que de $\delta$.
   (b) Pour $n \geqslant 1$ entier, on pose $h_n(z) = \frac{f(z)^n}{g(z)}$. Majorer $|h_n|$ au bord du demi-disque ouvert $\mathring{V} \cap D(0, R)$ et en déduire que $f$ vérifie :
$$\forall z \in V,\ |f(z)| \leqslant 1.$$
3. En déduire que si $f$ est une fonction entière non constante telle qu'il existe $\varepsilon < 1/2$ et des constantes $A, B$ tels que
$$\forall z \in \mathbb{C},\ |f(z)| \leqslant A \exp(B|z|^\varepsilon),$$
alors $f$ n'est bornée sur aucune demi-droite partant de l'origine.
4. *Application.* Soit $f$ une fonction holomorphe non nulle sur un disque centré en 0, solution de l'équation $f'(z) = -f(z/2)$.

(a) Expliciter le développement de $f$ en série entière en 0 et montrer que $f$ est entière.

(b) Pour tout $R > 0$, on note $M(R) = \max_{|z|=R} |f(z)|$. Montrer que $M(R) \leqslant 2RM(R/2)$ dès que $R \geqslant 1$.

(c) Montrer que $f$ n'est bornée sur aucune demi-droite partant de l'origine.

**Exercice 3**

On note $\Gamma$ (resp. $\zeta$) la fonction Gamma d'Euler (resp. la fonction zêta de Riemann) et l'on définit :

$$\Xi(s) = \frac{1}{2}s(s-1)\pi^{-s/2}\Gamma(s/2)\zeta(s)\,.$$

On rappelle (et on utilisera sans démonstration) que $\Xi$ se prolonge en une fonction entière d'ordre de croissance 1.

1. Montrer que pour tout $s$ en dehors des zéros de $\Xi$, on a

$$\frac{\Xi'(s)}{\Xi(s)} = B + \sum_{\rho}\left(\frac{1}{s-\rho} + \frac{1}{\rho}\right)\,,$$

où $B \in \mathbb{C}$ est une constante et où $\rho$ parcourt la suite des zéros de $\Xi$.

2. Justifier que pour $s$ en dehors des entiers pairs strictement négatifs, on a

$$-\frac{1}{2}\frac{\Gamma'(s/2+1)}{\Gamma(s/2+1)} = \frac{\gamma}{2} + \sum_{n\geqslant 1}\left(\frac{1}{s+2n} - \frac{1}{2n}\right)\,,$$

où $\gamma := \lim_{N\to\infty}(\sum_{n=1}^{N} 1/n) - \log N$ désigne la constante d'Euler.

3. Déduire que pour $s$ en dehors des pôles et zéros de $\zeta$ on a :

$$\frac{\zeta'(s)}{\zeta(s)} + \frac{1}{s-1} - \frac{\gamma+\log\pi}{2} - \sum_{n\geqslant 1}\left(\frac{1}{s+2n} - \frac{1}{2n}\right) = \frac{\Xi'(s)}{\Xi(s)}\,.$$

4. Calculer les quantités $-\dfrac{1}{2}\dfrac{\Gamma'(3/2)}{\Gamma(3/2)}$ et $\lim\limits_{\substack{s\to 1\\ s>1}}\left(\dfrac{\zeta'(s)}{\zeta(s)} + \dfrac{1}{s-1}\right)$.

   [Pour la seconde quantité, on pourra utiliser, après l'avoir justifié, l'égalité : $\zeta(s) = \dfrac{s}{s-1} - s\displaystyle\int_1^{\infty}\{x\}x^{-s-1}\,\mathrm{d}x$ si $\operatorname{Re} s > 1$, où $\{x\} = x - \lfloor x\rfloor$ désigne la partie fractionnaire de $x$.]

5. Déduire la valeur de la constante $B$. On admet dans la suite que $-0,023$ est une valeur approchée à $10^{-3}$ près de $B$.

6. Justifier l'existence de la limite $\lim\limits_{T\to\infty}\displaystyle\sum_{|\operatorname{Im}\rho|\leqslant T}\frac{1}{\rho}$, où $\rho$ parcourt les zéros de $\Xi$.

   [On pourra commencer par justifier l'invariance de l'ensemble des zéros non triviaux de zêta par conjugaison.]

7. Établir un lien entre $B$ et la limite considérée à la question 6. Déduire que les zéros non triviaux $\rho$ de $\zeta$ vérifient $|\operatorname{Im}\rho| > 6$.

**Exercice 4**

Dans tout l'exercice, les polygones qui interviennent sont considérés comme fermés et pleins.

1. Si $a \in \mathbb{C}$ et $\gamma_1, \gamma_2 : [0,1] \to \mathbb{C}$ sont deux courbes $\mathcal{C}^1$ avec $\gamma_1(0) = \gamma_2(0) = a$, *l'angle de* $\gamma_1$ *à* $\gamma_2$ *en* $a$ est par définition l'angle (orienté dans le sens trigonométrique) entre $\gamma_1'(0)$ et $\gamma_2'(0)$. Soit $h$ une fonction holomorphe sur un voisinage de $a$ ; que peut-on dire de l'angle de $h \circ \gamma_1$ à $h \circ \gamma_2$ en $h(a)$ ?
2. On se donne deux rectangles du plan $R$ et $S$. On suppose qu'il existe une fonction holomorphe $f$ définie sur un ouvert contenant $R$, telle que $f(R) = S$.
   (a) Montrer que $f$ induit une bijection entre les sommets de $R$ et ceux de $S$.
   (b) Soit $C$ un côté du rectangle $S$. Montrer qu'il existe un côté $c$ du rectangle $R$ tel que $f(c) \cap C$ soit infini. Montrer que cela entraîne $f(c) = C$ (on pourra se ramener au cas où $c$ et $C$ sont inclus dans $\mathbb{R}$). Conclure que $f$ envoie chaque côté de $R$ sur un côté de $S$.
   (c) Montrer que l'on peut étendre $f$ en une fonction entière à croissance linéaire ? Conclure que $f$ est une transformation affine et que $R$ et $S$ sont semblables.
   (d) Soit $R, S$ deux rectangles non semblables. Montrer qu'il existe une fonction $g$ holomorphe sur $\mathring{R}$, telle que $f(\mathring{R}) = \mathring{S}$ et telle que l'image par $f$ d'un rectangle inclus dans $\mathring{R}$ n'est jamais un rectangle.
3. On suppose que $R$ et $S$ sont maintenant deux polygones convexes à $n$ côtés ; $f$ est encore une application holomorphe définie sur un ouvert contenant $R$, telle que $f(R) = S$.
   (a) En s'inspirant de la question précédente, montrer que $f$ réalise une bijection du bord de $R$ sur le bord de $S$ et que les angles intérieurs de $R$ et $S$ sont les mêmes. En déduire que $f$ induit une application conforme de l'intérieur de $R$ sur celui de $S$.
   (b) Si $n = 3$, i.e. si $R$ et $S$ sont deux triangles, montrer que la conclusion de la question 1 reste valable : $f$ est une transformation affine. On utilisera librement le fait que toute application conforme entre l'intérieur d'un triangle et le disque unité s'étend continûment au bord.

**Exercice 5** (*À ne traiter que si vous avez fait tout ce qui précède*)
On dit qu'une fonction définie sur un ouvert de $\mathbb{C}^2$ est *holomorphe* si elle est holomorphe en chaque variable séparément. On considère les ouverts

$$U = \big\{(z_1, z_2) \in \mathbb{C}^2 \colon |z_1|, |z_2| < 1\big\} \quad ; \quad U' = U \setminus \left\{(z_1, z_2) \in \mathbb{C}^2 \colon |z_1|, |z_2| \leqslant \frac{1}{2}\right\}.$$

Montrer qu'une fonction holomorphe $f$ sur $U'$ s'étend toujours en une fonction holomorphe sur $U$. On pourra regarder le développement en série de Laurent de $f$ en la variable $z_1$.